局所エネルギー可積分性評価の証明と非線形問題への応用 (エネルギーの評価から見た波動方程式の研究)

横山, 和義

数理解析研究所講究録 1411 巻 2005 年 25-36

局所エネルギー可積分性評価の証明と非線形問題への応用

北海道工業大学　横山 和義 (Kazuyoshi Yokoyama)
Hokkaido Institute of Technology

1 序.

線形波動方程式の初期値問題

$$\Box u(t,x)=0, \qquad t\in\mathbf{R},\ x\in\mathbf{R}^n, \tag{1}$$
$$u(0,x)=f(x),\ \partial_t u(0,x)=g(x), \qquad x\in\mathbf{R}^n, \tag{2}$$

の解に対して成立する有用な評価を紹介する．ここで $\Box=\partial_t^2-\Delta$ であり, $u:\mathbf{R}\times\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$ であるとする．初期値問題 (1) - (2) の解 u に対して次の時空 L^2-評価が成り立つ．

$$\|\langle r\rangle^{-1/2}\partial u\|_{L^2([0,T]\times\mathbf{R}^n)}\leqq C\sqrt{\log(2+T)}\big(\|\nabla f\|_{L^2}+\|g\|_{L^2}\big), \tag{3}$$
$$\|\langle r\rangle^{-1/2-\delta}\partial u\|_{L^2([0,T]\times\mathbf{R}^n)}\leqq C\big(\|\nabla f\|_{L^2}+\|g\|_{L^2}\big). \tag{4}$$

ここで $r=|x|$, $\langle r\rangle=\sqrt{1+r^2}$, $\delta>0$ であり, C は u, f, g および T に無関係な定数である．また, ∂u は u の時空変数に関する導関数である．

右辺がエネルギー評価に現れるものと同じであることが大きな利点である．この評価は最初 Keel-Smith-Sogge [5] により $n=3$ の場合に示された．その後 Metcalfe [8] により (本質的には) 一般次元で証明された．さらに Hidano-Yokoyama [2, 3] により一般化が論じられている．

Keel-Smith-Sogge [5] が最初に上述時空評価の有効性を示した外部領域での初期・境界値問題に関してはその後もいくつかの優れた結果が得られている (例えば [6, 9] など．もちろん Duhamel の原理により非同次の場合に一般化して用いる)．また, 原点に特異性を持つ波動方程式の初期値問題 (Hidano [1]) や正則性の低い解の構成 (Hidano-Yokoyama [4]) に応用されるなどの新しい展開も見られ, 今後も様々な場面で活用されることが期待される．

本稿では上の時空評価の証明法を 2 つ紹介する．2 節では Fourier 変換を用いる証明, 3 節では Multiplier Method による証明を与える．さらに 4 節では (3), (4) に関連する時空評価を紹介する．最後に 5 節では非線形問題への応用例として Hidano-Yokoyama [4] で論じられた正則性の低い球対称解を得るための評価法を説明する．

なお, 本稿の内容は肥田野久二男・三重大学助教授との共同研究に基く．

2 Fourier 変換を使う証明.

この節では初期値問題 (1)–(2) の解に対する Fourier 変換を用いた時空評価の証明を述べる. 証明のアイディアは Metcalfe [8] による. また, Hidano-Yokoyama [2] の Appendix も参照のこと.

補題 1 f, g は急減少関数で, 原点の近傍で $\widehat{g}=0$ とする. u を初期値問題 (1)–(2) の解とする. このとき, 任意の $\mathbf{R}^n$ における急減少関数 $\beta(x)$ に対し

$$\begin{aligned}
\widetilde{\beta\partial_t u}(\tau,\xi) &= \frac{1}{2}\int_{S^{n-1}}\widehat{\beta}(\xi-|\tau|\omega)\widehat{g}(|\tau|\omega)|\tau|^{n-1}d\omega \\
&\quad +\frac{i}{2}\int_{S^{n-1}}\widehat{\beta}(\xi-|\tau|\omega)\tau\widehat{f}(|\tau|\omega)|\tau|^{n-1}d\omega, && (5)\\
\widetilde{\beta\partial_j u}(\tau,\xi) &= \frac{1}{2}\int_{S^{n-1}}\widehat{\beta}(\xi-|\tau|\omega)|\tau|\omega_j\frac{\widehat{g}(|\tau|\omega)}{\tau}|\tau|^{n-1}d\omega \\
&\quad +\frac{i}{2}\int_{S^{n-1}}\widehat{\beta}(\xi-|\tau|\omega)|\tau|\omega_j\widehat{f}(|\tau|\omega)|\tau|^{n-1}d\omega && (6)
\end{aligned}$$

が成り立つ. ただし, $\widehat{\ }$ と $\widetilde{\ }$ はそれぞれ空間変数, 時空変数に関する Fourier 変換を表す.

証明.

$$\begin{aligned}
\widehat{u}(t,\eta) &= \frac{\sin t|\eta|}{|\eta|}\widehat{g}(\eta)+\cos t|\eta|\widehat{f}(\eta)\\
&= \frac{1}{2i}(e^{it|\eta|}-e^{-it|\eta|})\frac{\widehat{g}(\eta)}{|\eta|}+\frac{1}{2}(e^{it|\eta|}+e^{-it|\eta|})\widehat{f}(\eta)
\end{aligned}$$

であるから

$$\widetilde{u}(\tau,\eta)=\frac{1}{2i}\{\delta(\tau-|\eta|)-\delta(\tau+|\eta|)\}\frac{\widehat{g}(\eta)}{|\eta|}+\frac{1}{2}\{\delta(\tau-|\eta|)+\delta(\tau+|\eta|)\}\widehat{f}(\eta).$$

よって

$$\begin{aligned}
\widetilde{\beta\partial_j u}(\tau,\xi) &= \int_{\mathbf{R}^n}\widehat{\beta}(\xi-\eta)\widetilde{\partial_j u}(\tau,\eta)d\eta\\
&= \operatorname{sgn}\tau\cdot\frac{1}{2}\int_{|\eta|=|\tau|}\widehat{\beta}(\xi-\eta)\eta_j\frac{\widehat{g}(\eta)}{|\eta|}dS_\eta+\frac{i}{2}\int_{|\eta|=|\tau|}\widehat{\beta}(\xi-\eta)\eta_j\widehat{f}(\eta)dS_\eta\\
&= \frac{1}{2}\int_{S^{n-1}}\widehat{\beta}(\xi-|\tau|\omega)|\tau|\omega_j\frac{\widehat{g}(|\tau|\omega)}{\tau}|\tau|^{n-1}d\omega\\
&\quad +\frac{i}{2}\int_{S^{n-1}}\widehat{\beta}(\xi-|\tau|\omega)|\tau|\omega_j\widehat{f}(|\tau|\omega)|\tau|^{n-1}d\omega.
\end{aligned}$$

$\widetilde{\beta\partial_t u}(\tau,\xi)$ についても同様. □

補題 2 $f \in H^1(\mathbf{R}^n)$, $g \in L^2(\mathbf{R}^n)$ とし, u を初期値問題 (1)–(2) の解とする. このとき, 任意の $\mathbf{R}^n$ における急減少関数 $\beta(x)$ に対し

$$\|\beta\partial u\|_{L^2(\mathbf{R}\times\mathbf{R}^n)} \leq C_\beta\big(\|\nabla f\|_{L^2} + \|g\|_{L^2}\big). \tag{7}$$

証明. f, g を急減少関数とする. さらに, 原点の近傍で $\widehat{g} = 0$ であるとする. このとき補題 1 と Hölder の不等式により,

$$\begin{aligned}
\big|\widetilde{\beta\partial u}(\tau,\xi)\big|^2 &\leq C\Big|\int_{S^{n-1}} \widehat{\beta}(\xi - |\tau|\omega)\widehat{g}(|\tau|\omega)|\tau|^{n-1}d\omega\Big|^2 \\
&\quad +C\Big|\int_{S^{n-1}} \widehat{\beta}(\xi - |\tau|\omega)|\tau|\widehat{f}(|\tau|\omega)|\tau|^{n-1}d\omega\Big|^2 \\
&\leq C\int_{S^{n-1}} |\widehat{\beta}(\xi - |\tau|\omega)||\tau|^{n-1}d\omega \\
&\quad \times\int_{S^{n-1}} |\widehat{\beta}(\xi - |\tau|\omega)|\big\{|\widehat{g}(|\tau|\omega)|^2 + |\tau|^2|\widehat{f}(|\tau|\omega)|^2\big\}|\tau|^{n-1}d\omega.
\end{aligned}$$

ここで, $|\tau| \geq 1$ とするとトレース定理により

$$\big\|\widehat{\beta}(\xi - |\tau|\omega)|\tau|^{n-1}\big\|_{L^1_\omega(S^{n-1})} \leq C\big\|\widehat{\beta}(\xi - |\tau|z)|\tau|^{n-1}\big\|_{W^{1,1}_z(B_1)} \leq C\|\widehat{\beta}\|_{W^{1,1}(\mathbf{R}^n)}$$

であることが分かるので,

$$\int_{S^{n-1}} |\widehat{\beta}(\xi - |\tau|\omega)||\tau|^{n-1}d\omega \leq C\big(\|\widehat{\beta}\|_{W^{1,1}} + \|\widehat{\beta}\|_{L^\infty}\big).$$

従って,

$$\begin{aligned}
\|\beta\partial u\|^2_{L^2(\mathbf{R}\times\mathbf{R}^n)} &= \|\widetilde{\beta\partial v}\|^2_{L^2(\mathbf{R}\times\mathbf{R}^n)} \\
&\leq C_\beta\int_{\mathbf{R}}\int_{S^{n-1}} \big\{|\widehat{g}(|\tau|\omega)|^2 + |\tau|^2|\widehat{f}(|\tau|\omega)|^2\big\}|\tau|^{n-1}d\omega d\tau \\
&= C_\beta\big(\|\widehat{g}\|^2_{L^2} + \||\xi|\widehat{f}\|^2_{L^2}\big) \\
&= C_\beta\big(\|g\|^2_{L^2} + \|\nabla f\|^2_{L^2}\big).
\end{aligned}$$

さらに稠密性の議論により $f \in H^1(\mathbf{R}^n)$, $g \in L^2(\mathbf{R}^n)$ に対しても (7) が成り立つことが分かる. □

命題 1 $f \in H^1(\mathbf{R}^n)$, $g \in L^2(\mathbf{R}^n)$ とし, u を初期値問題 (1)–(2) の解とする. このとき

$$\|\langle r\rangle^{-1/2}\partial u\|_{L^2([0,T]\times\mathbf{R}^n)} \leq C\sqrt{\log(2+T)}\big(\|\nabla f\|_{L^2} + \|g\|_{L^2}\big) \tag{8}$$

が成り立つ. ここで $r = |x|$ である. また, $\delta > 0$ とすると,

$$\|\langle r\rangle^{-1/2-\delta}\partial u\|_{L^2([0,T]\times\mathbf{R}^n)} \leq C\big(\|\nabla f\|_{L^2} + \|g\|_{L^2}\big). \tag{9}$$

証明. $\beta \in C_0^\infty(\mathbf{R}_x^n)$, $\operatorname{supp}\beta \subset \{1/2 \le r \le 4\}$, $\beta = 1$ on $\{1 \le r \le 2\}$ とする. $\lambda > 0$ に対して $u_\lambda(t,x) = \lambda^{1/2}u(\lambda t, \lambda x)$ と置く. まず補題 2 により,

$$\|\partial u_\lambda\|_{L^2(\mathbf{R}\times\{1<r<2\})} \le C\|\partial u_\lambda(0,\cdot)\|_{L^2} \tag{10}$$

が成り立つ. また,

$$\|\partial u_\lambda(0,\cdot)\|_{L^2} = \|\partial u(0,\cdot)\|_{L^2} \tag{11}$$

であることが積分の変数変換により確かめられる. さらに,

$$\|\partial u_\lambda\|_{L^2(\mathbf{R}\times\{1<r<2\})} = \lambda^{-1/2}\|\partial u\|_{L^2(\mathbf{R}\times\{\lambda<r<2\lambda\})}$$

であるから

$$\|r^{-1/2}\partial u\|_{L^2(\mathbf{R}\times\{\lambda<r<2\lambda\})} \le C\|\partial u_\lambda\|_{L^2(\mathbf{R}\times\{1<r<2\})}. \tag{12}$$

よって (10), (11), (12) により

$$\begin{aligned}\|r^{-1/2}\partial u\|_{L^2(\mathbf{R}\times\{\lambda<r<2\lambda\})} &\le C\|\partial u_\lambda\|_{L^2(\mathbf{R}\times\{1<r<2\})}\\ &\le C\|\partial u_\lambda(0,\cdot)\|_{L^2} \le C\|\partial u(0,\cdot)\|_{L^2}\end{aligned} \tag{13}$$

が得られる.

ここで, $2^{N-1} \le T \le 2^N$ なる自然数 N をとる. $N-1 \le \log T/\log 2 \le N$ であるので, (13) により,

$$\begin{aligned}\|\langle r\rangle^{-1/2}\partial u\|^2_{L^2(\mathbf{R}\times\{r<T\})} &\le \|\partial u\|^2_{L^2(\mathbf{R}\times\{r<1\})} + \sum_{j=1}^{N}\|r^{-1/2}\partial u\|^2_{L^2(\mathbf{R}\times\{2^{j-1}<r<2^j\})}\\ &\le C(N+1)\|\partial u(0,\cdot)\|^2_{L^2}\\ &\le C\log(2+T)\|\partial u(0,\cdot)\|^2_{L^2}.\end{aligned}$$

一方, よく知られたエネルギー評価により

$$\begin{aligned}\|r^{-1/2}\partial u\|^2_{L^2([0,T]\times\{r>T\})} &\le T^{-1}\int_0^T \|\partial u(t,\cdot)\|^2_{L^2}dt\\ &\le \|\partial u(0,\cdot)\|^2_{L^2}.\end{aligned}$$

が従う. これらを合わせて (8) が得られる. (9) も同様にして示される. □

命題 1 と Duhamel の原理により次が得られる.

系 1 $f \in H^1(\mathbf{R}^n)$, $g \in L^2(\mathbf{R}^n)$, $F \in C\big([0,\infty); L^2(\mathbf{R}^n)\big)$ とする. 初期値問題

$$\Box u(t,x) = F(t,x), \qquad t>0,\ x\in\mathbf{R}^n, \tag{14}$$

$$u(0,x) = f(x),\ \partial_t u(0,x) = g(x), \qquad x \in \mathbf{R}^n, \tag{15}$$

の解に対して

$$
\begin{aligned}
&\|\langle r\rangle^{-1/2}\partial u\|_{L^2([0,T]\times\mathbf{R}^n)}\\
&\quad\le C\sqrt{\log(2+T)}\Big(\|\nabla f\|_{L^2}+\|g\|_{L^2}+\int_0^T\|F(\tau,\cdot)\|_{L^2}\,d\tau\Big)
\end{aligned}
\tag{16}
$$

が成り立つ. また, $\delta>0$ とすると

$$
\begin{aligned}
&\|\langle r\rangle^{-1/2-\delta}\partial u\|_{L^2([0,T]\times\mathbf{R}^n)}\\
&\quad\le C\Big(\|\nabla f\|_{L^2}+\|g\|_{L^2}+\int_0^T\|F(\tau,\cdot)\|_{L^2}\,d\tau\Big).
\end{aligned}
\tag{17}
$$

3 Multiplier Method による証明.

本節では Mochizuki [10, 第 7 章] の方針で Multiplier Method による時空評価 (4) の証明法を与える. この方法では時空評価 (3) の方は困難であると思われるし, $n=2$ の場合が扱えないという難点があるが, Fourier 変換が使えないような状況で役に立つ可能性がある.

補題 3 $r^{(n-1)/2}u=v$ と置くと,

$$
r^{(n-1)/2}\Box u=\Box v+\frac{n-1}{r}\partial_r v+\frac{(n-1)(n-3)}{4r^2}v. \tag{18}
$$

ただし $\partial_r=\omega\cdot\nabla$, $\omega=x/r$, $r=|x|$.

証明. 直接計算により,

$$
\partial_r v = r^{(n-1)/2}\Big(\partial_r u+\frac{n-1}{2r}u\Big), \tag{19}
$$

$$
\partial_r^2 v = r^{(n-1)/2}\Big(\partial_r^2 u+\frac{n-1}{r}\partial_r u+\frac{(n-1)(n-3)}{4r^2}u\Big) \tag{20}
$$

であることが分かるから,

$$
\begin{aligned}
\Delta v-\frac{n-1}{r}\partial_r v &= \partial_r^2 v+\frac{1}{r^2}\Delta_S v\\
&= r^{(n-1)/2}\Big(\Delta u+\frac{(n-1)(n-3)}{4r^2}u\Big).
\end{aligned}
$$

ここで Δ_S は S^n 上のラプラシアンであり, $\Delta=\partial_r^2+(n-1)r^{-1}\partial_r+r^{-2}\Delta_S$ に注意する. よって (18) が示された. □

補題 4

$$r^{(n-1)/2}\Box u\cdot r^{-n+1}\big(\partial_t v+\psi(r)\partial_r v\big)=\partial_t X-\nabla\cdot Y+Z_1-Z_2. \tag{21}$$

ただし,

$$\begin{aligned}
X &= \frac{1}{2}\big\{(\partial_t u)^2+|\theta|^2\big\}+\psi\partial_t u(\omega\cdot\theta)+\frac{(n-1)(n-3)}{8r^2}u^2,\\
Y &= \theta\partial_t u+\psi(\omega\cdot\theta)\theta+\frac{1}{2}\psi\omega(\partial_t u)^2-\frac{1}{2}\psi\omega|\theta|^2-\frac{(n-1)(n-3)}{8r^2}\psi\omega u^2,\\
Z_1 &= \frac{1}{2}\psi'\big\{(\partial_t u)^2+|\theta|^2\big\}+(\frac{\psi}{r}-\psi')\big\{|\theta|^2-(\omega\cdot\theta)^2\big\}+\frac{(n-1)(n-3)}{4r^3}\psi u^2,\\
Z_2 &= \frac{(n-1)(n-3)}{8r^2}\psi' u^2,\\
\theta &= \Big(\nabla+\frac{n-1}{2r}\omega\Big)u.
\end{aligned}$$

証明. まず以下の計算に用いられる主な公式を準備しておこう.

$$r^{-(n-1)/2}\nabla v=\theta,\quad r^{-(n-1)/2}\partial_r v=\omega\cdot\theta, \tag{22}$$

$$\varphi=\varphi(r) \text{ とするとき } \nabla v\cdot\nabla\varphi=\partial_r v\partial_r\varphi, \tag{23}$$

$$\nabla\cdot(r^{-n+1}\omega fg)=r^{-n+1}f\partial_r g+r^{-n+1}g\partial_r f \tag{24}$$

である. これらは簡単に確かめられる. 以下の計算でこれらを断りなく用いる.

まず $r^{(n-1)/2}\Box u\cdot r^{-n+1}\partial_t v$ から計算しよう.

$$\partial_t^2 v\cdot r^{-n+1}\partial_t v=\partial_t\Big\{\frac{1}{2}r^{-n+1}(\partial_t v)^2\Big\}=\partial_t\Big\{\frac{1}{2}(\partial_t u)^2\Big\},$$

$$\begin{aligned}
\Delta v\cdot r^{-n+1}\partial_t v &= \nabla\cdot(\nabla v\cdot r^{-n+1}\partial_t v)-\partial_r v\cdot\partial_r r^{-n+1}\cdot\partial_t v-\nabla v\cdot r^{-n+1}\partial_t\nabla v\\
&= \nabla\cdot(\theta\partial_t u)+\frac{n-1}{r}\partial_r v\cdot r^{-n+1}\partial_t v-\partial_t\Big(\frac{1}{2}|\theta|^2\Big),
\end{aligned}$$

$$\frac{(n-1)(n-3)}{4r^2}v\cdot r^{-n+1}\partial_t v=\partial_t\Big\{\frac{(n-1)(n-3)}{8r^2}r^{-n+1}v^2\Big\}=\partial_t\Big\{\frac{(n-1)(n-3)}{8r^2}u^2\Big\}$$

と補題 3により

$$r^{(n-1)/2}\Box u\cdot r^{-n+1}\partial_t v=\partial_t\Big\{\frac{1}{2}(\partial_t u)^2+\frac{1}{2}|\theta|^2+\frac{(n-1)(n-3)}{8r^2}u^2\Big\}-\nabla\cdot(\theta\partial_t u) \tag{25}$$

が得られる.

次に $r^{(n-1)/2}\Box u\cdot r^{-n+1}\psi(r)\partial_r v$ の方を計算する.

$$\begin{aligned}
\partial_t^2 v\cdot r^{-n+1}\psi\partial_r v &= \partial_t(\partial_t v\cdot r^{-n+1}\psi\partial_r v)-\partial_t v\cdot r^{-n+1}\psi\partial_t\partial_r v\\
&= \partial_t\big(\psi\partial_t u(\omega\cdot\theta)\big)-\Big\{\nabla\cdot\Big(\frac{1}{2}r^{-n+1}\omega\psi(\partial_t v)^2\Big)-\frac{1}{2}r^{-n+1}\partial_r\psi(\partial_t v)^2\Big\}\\
&= \partial_t\big(\psi\partial_t u(\omega\cdot\theta)\big)-\nabla\cdot\Big(\frac{1}{2}\psi\omega(\partial_t u)^2\Big)+\frac{1}{2}\partial_r\psi(\partial_t u)^2,
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\Delta v\cdot r^{-n+1}\psi\partial_r v &= \nabla\cdot(\nabla v\cdot r^{-n+1}\psi\partial_r v)-\nabla v\cdot\nabla(r^{-n+1}\psi\partial_r v)\\
&= \nabla\cdot\{\psi\theta(\omega\cdot\theta)\}-\{\partial_r v\cdot\partial_r(r^{-n+1}\psi)\partial_r v+r^{-n+1}\psi\nabla v\cdot\nabla\partial_r v\}\\
&= \nabla\cdot\{\psi\theta(\omega\cdot\theta)\}+\frac{n-1}{r}\partial_r v\cdot r^{-n+1}\psi\partial_r v-\partial_r\psi(\omega\cdot\theta)^2\\
&\quad -r^{-n+1}\psi\nabla v\cdot\nabla\partial_r v
\end{aligned}
$$

である. さらに

$$
\begin{aligned}
r^{-n+1}\psi\nabla v\cdot\nabla\partial_r v &= r^{-n+1}\psi\nabla v\cdot\partial_r\nabla v+r^{-n+1}\psi\nabla v\cdot[\nabla,\partial_r]v\\
&= \nabla\cdot\Big(\frac{1}{2}r^{-n+1}\omega\psi|\nabla v|^2\Big)-\frac{1}{2}r^{-n+1}\partial_r\psi|\nabla v|^2\\
&\quad +r^{-n+1}\psi r^{-1}\big(|\nabla v|^2-(\partial_r v)^2\big)\\
&= \nabla\cdot\Big(\frac{1}{2}\omega\psi|\theta|^2\Big)-\frac{1}{2}\partial_r\psi|\theta|^2+\psi r^{-1}\big(|\theta|^2-(\omega\cdot\theta)^2\big)
\end{aligned}
$$

となる. ここで $\nabla v\cdot[\nabla,\partial_r]v=\sum_{i,j=1}^n(\partial_j\omega_i)\partial_i v\partial_j v=r^{-1}\big(|\nabla v|^2-(\partial_r v)^2\big)$ に注意. 最後に

$$
\begin{aligned}
\frac{(n-1)(n-3)}{4r^2}v\cdot r^{-n+1}\psi\partial_r v &= \nabla\cdot\Big\{\frac{(n-1)(n-3)}{8r^2}r^{-n+1}\omega\psi v^2\Big\}\\
&\quad -\frac{(n-1)(n-3)}{8}r^{-n+1}\partial_r(r^{-2}\psi)v^2\\
&= \nabla\cdot\Big\{\frac{(n-1)(n-3)}{8r^2}\omega\psi u^2\Big\}\\
&\quad -\frac{(n-1)(n-3)}{8r^2}\partial_r\psi u^2+\frac{(n-1)(n-3)}{4r^3}\psi u^2.
\end{aligned}
$$

これらと補題 3 により

$$
\begin{aligned}
r^{(n-1)/2}\Box u\cdot r^{-n+1}\psi\partial_r v &= \partial_t\big(\psi\partial_t u(\omega\cdot\theta)\big)-\nabla\cdot\Big\{\frac{1}{2}\psi\omega(\partial_t u)^2+\psi\theta(\omega\cdot\theta)\\
&\quad -\frac{1}{2}\omega\psi|\theta|^2-\frac{(n-1)(n-3)}{8r^2}\omega\psi u^2\Big\}+Z_1-Z_2. \qquad (26)
\end{aligned}
$$

よって (25), (26) により (21) を得る. □

参考 (Morawetz's radial identity).

$$
\begin{aligned}
\Box u\cdot\Big(\partial_r u+\frac{n-1}{2r}u\Big) &= \partial_t\Big\{\partial_t u\Big(\partial_r u+\frac{n-1}{2r}u\Big)\Big\}-\nabla\cdot\Big\{\frac{1}{2}\omega\big((\partial_t u)^2-|\nabla u|^2\big)\\
&\quad +\Big(\partial_r u+\frac{n-1}{2r}u\Big)\nabla u+\frac{n-1}{2r^2}\omega u^2\Big\}\\
&\quad +\frac{1}{r}\big(|\nabla u|^2-(\partial_r u)^2\big)+\frac{(n-1)(n-3)}{4r^3}u^2. \qquad (27)
\end{aligned}
$$

$n\geq 4$, $\Box u=0$ のとき, (27) を $[0,T]\times\mathbf{R}^n$ で積分してエネルギー評価と Hardy の不等式を使うと,

$$
\int_0^T\int_{\mathbf{R}^n}\frac{u^2}{r^3}dxdt\leq C\big(\|\nabla f\|_{L^2}^2+\|g\|_{L^2}^2\big). \qquad (28)
$$

命題 2 $n \neq 2$ とする．$f \in H^1(\mathbf{R}^n)$, $g \in L^2(\mathbf{R}^n)$ とし，u を (1)–(2) の解とすると，$\delta > 0$ に対し

$$\|\langle r\rangle^{-1/2-\delta}\partial u\|_{L^2([0,T]\times\mathbf{R}^n)} \leq C\bigl(\|\nabla f\|_{L^2} + \|g\|_{L^2}\bigr). \tag{29}$$

証明．$f, g \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ に対して証明すればよい．補題 4 の恒等式を $[0,t]\times\mathbf{R}^n$ で積分すると，

$$\int_{\mathbf{R}^n} X(t,x)dx + \int_0^t\int_{\mathbf{R}^n} Z_1(s,x)dxds = \int_{\mathbf{R}^n} X(0,x)dx + \int_0^t\int_{\mathbf{R}^n} Z_2(s,x)dxds.$$

ここで

$$\psi(r) = \gamma\Bigl\{1 - \frac{(1+r)^{-2\delta}}{1+2\delta}\Bigr\}, \quad 0<\gamma<1$$

と置く．

$$\frac{2\delta\gamma}{1+2\delta} \leq \psi \leq \gamma, \quad \psi' = \frac{2\delta\gamma}{1+2\delta}(1+r)^{-1-2\delta} \leq \frac{\psi}{r}$$

なので，

$$\begin{aligned}
X &\leq (\partial_t u) + |\theta|^2 + \frac{(n-1)(n-3)}{8r^2}u^2, \\
X &\geq \frac{1-\gamma}{2}\{(\partial_t u) + |\theta|^2\} + \frac{(n-1)(n-3)}{8r^2}u^2, \\
Z_1 &\geq \frac{2\delta\gamma}{1+2\delta}\Bigl[(1+r)^{-1-2\delta}\{(\partial_t u)^2 + |\theta|^2\} + \frac{(n-1)(n-3)}{4r^3}u^2\Bigr], \\
Z_2 &\leq \frac{(n-1)(n-3)}{8r^2}(1+r)^{-1-2\delta}u^2.
\end{aligned}$$

また

$$\begin{aligned}
|\theta|^2 &= |\nabla u|^2 + \frac{n-1}{r}u\partial_r u + \Bigl(\frac{n-1}{2r}\Bigr)^2 u^2 \\
&= |\nabla u|^2 + \nabla\cdot\Bigl(\frac{n-1}{2r}\omega u^2\Bigr) - \frac{(n-1)(n-3)}{4r^2}u^2,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(1+r)^{-1-2\delta}|\theta|^2 &= (1+r)^{-1-2\delta}|\nabla u|^2 + \nabla\cdot\Bigl(\frac{n-1}{2r(1+r)^{1+2\delta}}\omega u^2\Bigr) \\
&\quad + \frac{(n-1)(1+2\delta)}{2r(1+r)^{2+2\delta}}u^2 - \frac{(n-1)(n-3)}{4r^2(1+r)^{1+2\delta}}u^2
\end{aligned}$$

なので，

$$\frac{1-\gamma}{2}\|\partial u(t,\cdot)\|_{L^2}^2 \leq \int_{\mathbf{R}^n} X(t,x)dx \leq \|\partial u(t,\cdot)\|_{L^2}^2 + \frac{(n-1)(n-3)}{8}\Bigl\|\frac{u(t,\cdot)}{r}\Bigr\|_{L^2}^2,$$

$$\int_{\mathbf{R}^n} Z_1(t,x)dx \geq \frac{2\delta\gamma}{1+2\delta}\|(1+r)^{-1/2-\delta}\partial u(t,\cdot)\|_{L^2}^2.$$

以上より

$$\|\partial u(t,\cdot)\|_{L^2} + \|(1+r)^{-1/2-\delta}\partial u\|_{L^2([0,t]\times\mathbf{R}^n)} \le C\Big\{\|\partial u(0,\cdot)\|_{L^2} + \Big\|\frac{u(0,\cdot)}{r}\Big\|_{L^2} + (n-1)(n-3)\Big\|\frac{u}{r^{3/2}}\Big\|_{L^2([0,t]\times\mathbf{R}^n)}\Big\}.$$

あとは Hardy の不等式と Morawetz の不等式 (28) により結論を得る. □

4 関連する評価.

u を (1)–(2) の解とする. $n=3$ のときには Morawetz's radial identity (27) から

$$\int_0^T u(t,0)^2 dt \le C\big(\|\nabla f\|_{L^2}^2 + \|g\|_{L^2}^2\big)$$

が導かれる. 従ってこれを平行移動した

$$\int_0^T u(t,x)^2 dt \le C\big(\|\nabla f\|_{L^2}^2 + \|g\|_{L^2}^2\big) \tag{30}$$

も成り立つ (Morawetz [11] も参照のこと). これより

$$\begin{aligned}\|r^{-3/2}u\|^2_{L^2([0,T]\times\{\lambda<r<2\lambda\})} &= \int_{\{\lambda<r<2\lambda\}} r^{-3}\Big(\int_0^T u(t,x)^2 dt\Big)dx \\ &\le C\big(\|\nabla f\|_{L^2}^2 + \|g\|_{L^2}^2\big)\end{aligned}$$

が得られるので, 命題 1 の証明と同様にして次の評価が従う.

命題 3 $n=3$ とする. $f\in H^1(\mathbf{R}^3)$, $g\in L^2(\mathbf{R}^3)$ とし, u を初期値問題 (1)–(2) の解とする. このとき

$$\|\langle r\rangle^{-3/2}u\|_{L^2([0,T]\times\mathbf{R}^3)} \le C\sqrt{\log(2+T)}\big(\|\nabla f\|_{L^2} + \|g\|_{L^2}\big) \tag{31}$$

が成り立つ. ここで $r=|x|$ である. また, $\delta>0$ とすると,

$$\|\langle r\rangle^{-3/2-\delta}u\|_{L^2([0,T]\times\mathbf{R}^n)} \le C\big(\|\nabla f\|_{L^2} + \|g\|_{L^2}\big). \tag{32}$$

注意. (1) $n\ge 4$ の場合は (28) が成立.
(2) 2節のように Fourier 変換を使う方法でも証明出来る. 詳しくは Hidano-Yokoyama [2] を参照のこと.

命題 1 と命題 3 はさらに次のように拡張される (Hidano-Yokoyama [2]).

命題 4 $f \in H^1(\mathbf{R}^n)$, $g \in L^2(\mathbf{R}^n)$, $F \in C\big([0,\infty); L^2(\mathbf{R}^n)\big)$ とする．初期値問題

$$\Box u(t,x) = F(t,x), \qquad t>0,\ x \in \mathbf{R}^n, \tag{33}$$

$$u(0,x) = f(x),\ \partial_t u(0,x) = g(x), \qquad x \in \mathbf{R}^n, \tag{34}$$

の解に対して

$$\begin{aligned}&\big\{\log(2+T)\big\}^{-1/2}\|\langle r\rangle^{-\delta} r^{-1/2+\delta}\partial u\|_{L^2((0,T)\times\mathbf{R}^n)} + \|\langle r\rangle^{-\delta-\delta'} r^{-1/2+\delta}\partial u\|_{L^2((0,T)\times\mathbf{R}^n)} \\ &\le C\Big(\|\nabla f\|_{L^2} + \|g\|_{L^2} + \int_0^T \|F(\tau,\cdot)\|_{L^2}\,d\tau\Big)\end{aligned} \tag{35}$$

が成り立つ．ここで $\delta, \delta' > 0$ である．また $n=3$ とすると

$$\begin{aligned}&\big\{\log(2+T)\big\}^{-1/2}\|\langle r\rangle^{-\delta} r^{-3/2+\delta} u\|_{L^2((0,T)\times\mathbf{R}^3)} + \|\langle r\rangle^{-\delta-\delta'} r^{-3/2+\delta} u\|_{L^2((0,T)\times\mathbf{R}^3)} \\ &\le C\Big(\|\nabla f\|_{L^2} + \|g\|_{L^2} + \int_0^T \|F(\tau,\cdot)\|_{L^2}\,d\tau\Big).\end{aligned} \tag{36}$$

5 応用：正則性の低い解．

$f \in H^2(\mathbf{R}^3)$, $g \in H^1(\mathbf{R}^3)$ とする．さらに f, g は球対称であるとする．Hidano-Yokoyama [4] では初期値問題

$$\Box u = Q(\partial u), \qquad t>0,\ x \in \mathbf{R}^3, \tag{37}$$

$$u(0) = \varepsilon f, \quad \partial_t u(0) = \varepsilon g, \qquad x \in \mathbf{R}^3, \tag{38}$$

に対する $H^2 \times H^1$-クラスの解について, life-span T_ε の下からの評価を与えた．ただし非線型項 $Q(\partial u)$ は ∂u について 2 次斉次かつ空間回転について不変（$\Rightarrow$ 解も空間変数について球対称）であるとする．この $H^2 \times H^1$-球対称クラスについては Klainerman–Machedon [7] によって時間局所適切性が示されている．非球対称解も含めると $H^2 \times H^1$-クラスでは不適切であることも分かっているという点で興味深いクラスであることに注意する．

命題 5 ([4]) $f \in H^2(\mathbf{R}^3)$, $g \in H^1(\mathbf{R}^3)$ とする．さらに f, g は球対称であるとする．このとき正数 ε_0, A を適当にとれば, 任意の $0 < \varepsilon \le \varepsilon_0$ と $2 + T_\varepsilon = \exp\big[A/\varepsilon\big]$ で定められる T_ε に対し

$$u \in \bigcap_{j=0}^{2} C^j\big([0,T_\varepsilon]\,;\,H^{2-j}(\mathbf{R}^3)\big)$$

なる (37)–(38) の解が唯一つ存在する．

証明は次に定める完備距離空間 $\big(X_{R,T},\ \rho\big)$ において縮小写像の原理に持ち込むことによりなされる．

$$\begin{aligned} X_{R,T} \ = \ &\big\{u \in C\big([0,T]; \dot H^1_{\mathrm{rad}}(\mathbf{R}^3)\big) : \\ &\quad \partial^\alpha u \in C\big([0,T]; L^2(\mathbf{R}^3)\big)\ (1 \le |\alpha| \le 2),\ M_T(u) \le R\big\},\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
M_T(u) &= \sum_{1\le|\alpha|\le 2}\Big\{\|\partial^\alpha u\|_{L^\infty(0,T;L^2(\mathbf{R}^3))} + \big(\log(2+T)\big)^{-1/2}\|r^{-1/4}\langle r\rangle^{-1/4}\partial^\alpha u\|_{L^2((0,T)\times\mathbf{R}^3)}\Big\}\\
&\quad + \sum_{|\alpha|=1}\|r^{-5/4}\partial^\alpha u\|_{L^2((0,T)\times\{r<4\})},\\
\rho(u,v) &= M_T(u-v).
\end{aligned}
$$

写像 Φ を

$$
\begin{aligned}
\Phi[u](t) &= \varepsilon u_0(t) + I\big[Q(\partial u)\big], & (39)\\
u_0(t) &= (\cos\omega t)f + \frac{\sin\omega t}{\omega}g, & (40)\\
I[F](t) &= \int_0^t \frac{\sin\omega(t-\tau)}{\omega}F(\tau)\,d\tau & (41)
\end{aligned}
$$

(ただし $\omega=\sqrt{-\Delta}$) により定めると, 適当な R, T をとれば $X_{R,T}$ から $X_{R,T}$ の中への縮小写像となることが示される. その不動点が求める解であることは言うまでもない. 主な手順は以下の通り：

1. $M_T(\varepsilon u_0)\le C_0\varepsilon\big(\|\nabla f\|_{H^1}+\|g\|_{H^1}\big)$ を示す.
2. $M_T\big(I[F]\big)\le C\Big(\|F(0)\|_{L^2}+\sum_{|\alpha|\le 1}\int_0^T\|\partial^\alpha F(\tau)\|_{L^2}\,d\tau\Big)$ を示す.
3. $\sum_{|\alpha|\le 1}\big\|\partial^\alpha Q(\partial u)(t)\big\|_{L^2}\le C\Big(\sum_{|\beta|\le 1}\big\|r^{-1/4}\langle r\rangle^{-1/4}\partial\partial_x^\beta u(t)\big\|_{L^2}+\big\|r^{-5/4}\partial u(t)\big\|_{L^2(r<4)}\Big)$
$\times\sum_{|\beta|\le 1}\big\|r^{-1/4}\langle r\rangle^{-1/4}\partial\partial^\beta u(t)\big\|_{L^2}$ を示す.
4. $M_T\big(I\big[Q(\partial u)\big]\big)\le C_1\log(2+T)M_T(u)^2$ を示す.
5. $\rho\big(\Phi[u],\Phi[v]\big)\le C_2\log(2+T)\big(M_T(u)+M_T(v)\big)\rho(u,v)$ を示す.

あとは,

$$
\begin{aligned}
\Lambda &= \|\nabla f\|_{H^1}+\|g\|_{H^1}, & (42)\\
R_\varepsilon &= 2C_0\Lambda\varepsilon, & (43)\\
\log(2+T_\varepsilon) &= \min\Big\{\frac{1}{8C_0C_1\Lambda\varepsilon},\ \frac{1}{8C_0C_2\Lambda\varepsilon}\Big\} & (44)
\end{aligned}
$$

と置けば写像 Φ が $X_{R_\varepsilon,T_\varepsilon}$ から $X_{R_\varepsilon,T_\varepsilon}$ への縮小写像であることが容易に確かめられる. ただし (44) においては右辺が $\log 2$ より大きくなるように ε を十分小さくとる必要がある.

さて, 前節までに説明してきた時空評価は上の 1 と 2 で用いられている. $M_T(u)$ のうち, $\|\partial^\alpha u\|_{L^\infty(0,T;L^2(\mathbf{R}^3))}$ には通常のエネルギー評価を使い, 残りに命題 4 を適用すればよい. 4 は 2, 3 と Schwarz の不等式を使えば容易に得られる. 5 は 4 を導いた方法に従って得られる. 右辺がエネルギー評価と共通だから時空ノルムを使うことによる不自由は全く無く, 利用できるノルムが増えたことによる利益が大きいことを注意しておく.

最後に上の3を導出する方法についての要点を述べる．球対称性を仮定したことにより Sobolev 型評価

$$r^{1/2}|v(x)| \le C\|v\|_{\dot{H}^1(\mathbf{R}^3)}, \quad r|v(x)| \le C\|v\|_{H^1(\mathbf{R}^3)}$$

が成り立つ．右辺に1階微分しか要しないことが利点である．また，ウェイトを適当に分配するために空間変数に関する局所化（2進分解）を行ってから Sobolev 型評価を使うことがポイントである．詳しくは文献 [4] を参照されたい．

参考文献.

[1] K. Hidano, *Space-time L^2-estimates and global solutions to wave equations with singular nonlinear terms*, preprint.

[2] K. Hidano, K. Yokoyama, *A remark on the almost global existence theorems of Keel, Smith and Sogge*, Hokkaido University Preprint Series in Math. # 659.

[3] K. Hidano, K. Yokoyama, *A new proof of the global existence theorem of Klainerman*, Hokkaido University Preprint Series in Math. # 660.

[4] K. Hidano, K. Yokoyama, *Space-time L^2-estimates and life-span of the Klainerman-Machedon radial solutions to some semi-linear wave equations*, Hokkaido University Preprint Series in Math. # 655.

[5] M. Keel, H. Smith, C. D. Sogge, *Almost global existence for some semilinear wave equations*, J. Anal. Math. **87** (2002), 265–279.

[6] M. Keel, H. Smith, C. D. Sogge, *Almost global existence for quasilinear wave equations in three space dimensions*, J. Amer. Math. Soc. **17** (2004), 109–153.

[7] S. Klainerman, M. Machedon, *Space-time estimates for null forms and the local existence theorem*, Comm. Pure Appl. Math **46** (1993), 1221–1268.

[8] J. Metcalfe, *Global existence for semilinear wave equations exterior to nontrapping obstacles*, Houston J. Math. **30** (2004), 259–281.

[9] J. Metcalfe, M. Nakamura, C. D. Sogge, *Global existence of solutions to multiple speeds systems of quasilinear wave equations in exterior domains*, to appear in Forum Mathematicum.

[10] K. Mochizuki, 波動方程式の散乱理論, 紀伊國屋書店.

[11] C. S. Morawetz, *Time decay for the Klein-Gordon equation*, Proc. Roy. Soc. A **306** (1968), 291–296.